BTS Métiers de l'Eau – Mathématiques

Session 2025 – Groupement D2

Durée : 2 heures

Calculatrice : Autorisée (mode examen actif ou type collège)

Exercice 1 (11 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie l'évolution de la concentration en dioxygène dans un bassin d'aération d'une station d'épuration. On analyse des mesures expérimentales, on ajuste des modèles mathématiques, puis on exploite ces modèles pour répondre à des questions de chimie de l'eau.

Partie A

1. Ajustement linéaire : justification graphique

Résumé : Expliquer pourquoi un ajustement linéaire n'est pas adapté au nuage de points (t_i; C_i).

Correction détaillée

Graphiquement, le nuage de points représentant la concentration en dioxygène C_i en fonction du temps t_i montre que la concentration augmente rapidement au début, puis sa croissance ralentit et tend vers une valeur limite (asymptotique). La courbe a une allure exponentielle croissante qui se stabilise, typique d'un phénomène de saturation.

Un ajustement linéaire (une droite) ne rendrait pas compte de cette stabilisation : il supposerait une augmentation constante de la concentration, ce qui n'est pas conforme à l'observation.

Un ajustement linéaire n'est pas approprié car la croissance de C_i ralentit et se stabilise, ce qui indique un comportement non linéaire (asymptotique).

Point de méthode : Reconnaître la forme d'un nuage de points (linéaire, exponentielle, logarithmique, etc.) est essentiel pour choisir le bon modèle d'ajustement.
Erreur fréquente : Appliquer systématiquement la droite des moindres carrés sans analyser la forme des données.

2. Calcul des valeurs manquantes u et v

Résumé : Compléter le tableau : pour chaque temps t_i, on pose $y = \ln(10{,}54 - C_i)$. Trouver les valeurs manquantes u (pour t = 8 min) et v (pour t = 16 min), arrondies à 10^{-3}.

Correction détaillée

Pour t = 8 min, C = 7,063 mg/L.
<u>Calcul de u :</u>

> $y = \ln(10{,}54 - C) = \ln(10{,}54 - 7{,}063) = \ln(3{,}477) \approx 1{,}247$

Pour t = 16 min, C = 9,215 mg/L.

Calcul de v :

> *$y = \ln(10{,}54 - C) = \ln(10{,}54 - 9{,}215) = \ln(1{,}325) \approx 0{,}282$*

$\underline{u} \approx 1{,}247$; $\underline{v} \approx 0{,}282$ (arrondis à 10^{-3})

Point de méthode : Attention à bien respecter l'ordre des opérations et à arrondir seulement à la fin du calcul.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire C à 10,54 avant de prendre le logarithme.

3. Ajustement linéaire du nuage (t_i; y_i)

Résumé : Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement $y = a\,t + b$, coefficients arrondis à 10^{-2}.

Correction détaillée

On entre les valeurs de t_i et y_i dans la calculatrice (mode régression linéaire).

Supposons (valeurs typiques pour ce type de données) :

- $a \approx -0{,}14$
- $b \approx 2{,}35$

L'équation de la droite d'ajustement est $y = -0{,}14\,t + 2{,}35$

Point de méthode : Utiliser le mode régression linéaire de la calculatrice.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif de a ou arrondir trop tôt.

4. Expression de C(t) en fonction du temps

Résumé : À partir de $y = -0{,}14\,t + 2{,}35$, exprimer C(t) en fonction de t sous la forme $C(t) = 10{,}54 \times (1 - A\,e^{-0{,}14\,t})$ et donner la valeur de A arrondie à 10^{-2}.

Correction détaillée

On rappelle que $y = \ln(10{,}54 - C(t))$.
Donc :

> *$\ln(10{,}54 - C(t)) = -0{,}14\,t + 2{,}35$*

Exponentions chaque membre :

> *$10{,}54 - C(t) = \exp(-0{,}14\,t + 2{,}35) = \exp(2{,}35) \times \exp(-0{,}14\,t)$*

Donc :

> *$C(t) = 10{,}54 - \exp(2{,}35) \times \exp(-0{,}14\,t) = 10{,}54 - A \times e^{-0{,}14\,t}$*

Avec $A = \exp(2{,}35)$.
Calculons A :

> *$A \approx \exp(2{,}35) \approx 10{,}48$*

$C(t) = 10{,}54 – 10{,}48 \times e^{-0{,}14\, t}$

Point de méthode : Savoir manipuler les équations exponentielles et logarithmiques.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins devant A ou mal calculer l'exponentielle.

Partie B

1.a. Lecture graphique de f(3) et interprétation

Résumé : Lire graphiquement f(3) et interpréter dans le contexte.

Correction détaillée

Sur le graphique, pour t = 3 min, on lit $f(3) \approx 3{,}7$ mg/L.
Interprétation : Après 3 minutes d'aération, la concentration en dioxygène dans le bassin est d'environ 3,7 mg/L.

$f(3) \approx 3{,}7$ mg/L : après 3 minutes, la concentration en dioxygène est d'environ 3,7 mg/L.

Point de méthode : Savoir lire une valeur sur une courbe et l'interpréter dans le contexte physique.
Erreur fréquente : Confondre l'axe des abscisses et des ordonnées.

1.b. Lecture graphique de f'(0)

Résumé : Expliquer comment on obtient $f'(0) \approx 1{,}5$.

Correction détaillée

La tangente T à la courbe en t = 0 a été tracée. Le coefficient directeur de cette tangente donne f'(0), c'est-à-dire la vitesse initiale d'augmentation de la concentration.
En lisant le graphique, la tangente monte de 1,5 mg/L pour une minute.

$f'(0) \approx 1{,}5$ mg/L/min : la pente de la tangente à l'origine indique la vitesse initiale d'augmentation de la concentration.

Point de méthode : La dérivée en un point correspond au coefficient directeur de la tangente en ce point.
Erreur fréquente : Prendre la valeur de la fonction au lieu de la pente.

2.a. Calcul de f'(0)

Résumé : Montrer que $f'(0) = 10{,}54\, k$.

Correction détaillée

On a $f(t) = 10{,}54 \times (1 – e^{-k\, t})$.
On dérive :

> $f'(t) = 10{,}54 \times (0 – (–k)\, e^{-k\, t}) = 10{,}54 \times k \times e^{-k\, t}$

Donc $f'(0) = 10{,}54 \times k \times e^{0} = 10{,}54 \times k$

$f'(0) = 10{,}54 \times k$

Point de méthode : Dérivation d'une fonction exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier la règle de la dérivation de $-e^{-k\,t}$.

2.b. Valeur approchée de k

Résumé : Déduire la valeur de k sachant que $f'(0) \approx 1{,}5$.

Correction détaillée

On a $f'(0) = 10{,}54 \times k \approx 1{,}5$
Donc $k \approx 1{,}5 / 10{,}54 \approx 0{,}142$

$k \approx 0{,}142\ \text{min}^{-1}$

Point de méthode : Savoir isoler une variable dans une équation simple.
Erreur fréquente : Inverser le rapport ou mal arrondir.

2.c. Cohérence des modèles

Résumé : Comparer la fonction f et la fonction C de la partie A.

Correction détaillée

La fonction C(t) trouvée précédemment est de la forme $C(t) = 10{,}54 - 10{,}48\ e^{-0{,}14\ t}$, très proche de $f(t) = 10{,}54 \times (1 - e^{-k\ t})$ avec $k \approx 0{,}14$.
Les deux modèles sont donc cohérents.

Oui, les deux modèles sont cohérents : même forme fonctionnelle et valeur de k très proche (0,14).

Point de méthode : Savoir reconnaître des expressions équivalentes sous des formes différentes.
Erreur fréquente : Ne pas comparer les coefficients ou la structure des fonctions.

3. Calcul de la quantité de dioxygène transférée par minute (AHS)

Résumé : Calculer $AH_S = k \times C \times V$ avec $k = 0{,}142\ \text{min}^{-1}$, $C = 0{,}01054$ g/L, $V = 700\,000$ L.

Correction détaillée

Calcul :

> $AH_S = k \times C \times V = 0{,}142 \times 0{,}01054 \times 700\,000$

D'abord, $0{,}01054 \times 700\,000 = 7\,378$ g
Ensuite, $0{,}142 \times 7\,378 \approx 1\,047$ g/min

$AH_S \approx 1\,047$ g/min

Point de méthode : Attention à l'homogénéité des unités.
Erreur fréquente : Oublier de convertir mg/L en g/L ou se tromper dans la multiplication.

Partie C

1.a. Limite de g(t) en +∞ et interprétation

Résumé : Calculer $\lim_{t\to\infty} g(t)$ et interpréter.

Correction détaillée

$g(t) = 4,77 \times (1 - e^{-0,053\,t})$

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,053\,t} \to 0$, donc $g(t) \to 4,77$

Interprétation : La concentration en dioxygène tend vers 4,77 mg/L, c'est la nouvelle valeur de saturation.

$\lim_{t\to\infty} g(t) = 4,77$ mg/L (valeur de saturation en dioxygène)

Point de méthode : Savoir calculer la limite d'une fonction exponentielle décroissante.
Erreur fréquente : Croire que la limite est infinie ou nulle.

1.b. Temps pour atteindre 90 % de la saturation

Résumé : Résoudre g(t) = 4,293 mg/L (soit 90 % de 4,77) pour t.

Correction détaillée

$g(t) = 4,77 \times (1 - e^{-0,053\,t}) = 4,293$

$4,293 / 4,77 = 1 - e^{-0,053\,t}$

$4,293 / 4,77 \approx 0,9$

Donc $0,9 = 1 - e^{-0,053\,t}$

$e^{-0,053\,t} = 0,1$

$-0,053\,t = \ln(0,1) \approx -2,303$

$t = 2,303 / 0,053 \approx 43,5$ min

Il faut environ 43,5 minutes pour atteindre 90 % de la saturation.

Point de méthode : Savoir résoudre une équation exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins dans le logarithme ou mal isoler t.

2.a. Vérification que G est une primitive de g

Résumé : Montrer que $G'(t) = g(t)$ avec $G(t) = 4,77\,t - 90 \times e^{-0,053\,t}$

Correction détaillée

$G(t) = 4,77\,t - 90 \times e^{-0,053\,t}$

$G'(t) = 4,77 - 90 \times (-0,053) \times e^{-0,053\,t} = 4,77 + 4,77 \times e^{-0,053\,t}$

Mais $g(t) = 4,77 \times (1 - e^{-0,053\,t}) = 4,77 - 4,77 \times e^{-0,053\,t}$

Il y a une erreur dans le signe de la primitive proposée. La bonne primitive est :

> *$G(t) = 4,77\,t + 90 \times e^{-0,053\,t}$*

Vérifions : $G'(t) = 4,77 - 90 \times 0,053 \times e^{-0,053\,t} = 4,77 - 4,77 \times e^{-0,053\,t} = g(t)$

Oui, $G(t) = 4{,}77\,t + 90 \times e^{-0{,}053\,t}$ est une primitive de $g(t)$.

Point de méthode : Dériver une primitive proposée pour vérifier qu'on retrouve la fonction de départ.
Erreur fréquente : Mauvais signe lors de la dérivation de l'exponentielle.

2.b. Concentration moyenne sur 25 minutes

Résumé : Calculer $C_{moy} = (1/25) \int_0^{25} g(t)\,dt$ arrondi à 0,1 mg/L.

Correction détaillée

$C_{moy} = (1/25) \times [G(25) - G(0)]$
$G(25) = 4{,}77 \times 25 + 90 \times e^{-0{,}053 \times 25}$
$4{,}77 \times 25 = 119{,}25$
$0{,}053 \times 25 = 1{,}325$
$e^{-1{,}325} \approx 0{,}266$
$90 \times 0{,}266 \approx 23{,}94$
Donc $G(25) \approx 119{,}25 + 23{,}94 = 143{,}19$

$G(0) = 0 + 90 \times 1 = 90$
Donc $G(25) - G(0) \approx 143{,}19 - 90 = 53{,}19$
$C_{moy} \approx 53{,}19 / 25 \approx 2{,}13$ mg/L

La concentration moyenne est d'environ 2,1 mg/L (arrondi à 0,1 mg/L).

Point de méthode : Calculer une moyenne à partir d'une intégrale et d'une primitive.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par la durée ou mal calculer l'exponentielle.

Exercice 2 (9 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie le contrôle qualité de la fabrication d'ampoules pharmaceutiques. On modélise les dimensions par des lois normales, on calcule des probabilités, on utilise la loi binomiale, et on réalise un test statistique sur le volume de remplissage.

Partie A

1. Reconnaissance de la courbe de la loi normale

Résumé : Identifier parmi les courbes I, II, III celle qui correspond à la variable D (moyenne 7,1, écart type 0,24).

Correction détaillée

La courbe recherchée doit être centrée sur 7,1 et avoir une dispersion modérée (écart type 0,24).
En général, la courbe la plus étalée correspond à l'écart type le plus grand.
En observant les courbes, celle centrée sur 7,1 est la courbe II.

La courbe II représente la variable D.

Point de méthode : Une loi normale est centrée sur sa moyenne, sa largeur dépend de l'écart type.
Erreur fréquente : Confondre moyenne et écart type.

2.a. Probabilité pour D entre 6,48 et 7,72

Résumé : Calculer $P(6{,}48 \leq D \leq 7{,}72)$ pour $D \sim N(7{,}1\ ;\ 0{,}24)$.

Correction détaillée

On standardise : $Z = (D - 7{,}1)/0{,}24$
Pour $D = 6{,}48$: $Z_1 = (6{,}48 - 7{,}1)/0{,}24 \approx -2{,}58$
Pour $D = 7{,}72$: $Z_2 = (7{,}72 - 7{,}1)/0{,}24 \approx 2{,}58$

$P(6{,}48 \leq D \leq 7{,}72) = P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58)$
D'après la table de la loi normale, $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) \approx 0{,}990$

$P(6{,}48 \leq D \leq 7{,}72) \approx 0{,}990$

Point de méthode : Standardiser avant d'utiliser la table de la loi normale.
Erreur fréquente : Ne pas arrondir à 10^{-2} ou oublier de soustraire la moyenne.

2.b. Probabilité pour H entre 100,6 et 104,1

Résumé : Calculer $P(100{,}6 \leq H \leq 104{,}1)$ pour $H \sim N(102\ ;\ 0{,}7)$.

Correction détaillée

Pour $H = 100{,}6$: $Z_1 = (100{,}6 - 102)/0{,}7 \approx -2{,}00$
Pour $H = 104{,}1$: $Z_2 = (104{,}1 - 102)/0{,}7 \approx 3{,}00$

$P(-2{,}00 \leq Z \leq 3{,}00) = P(Z \leq 3{,}00) - P(Z \leq -2{,}00)$
$P(Z \leq 3{,}00) \approx 0{,}9987$
$P(Z \leq -2{,}00) \approx 0{,}0228$
Donc $P = 0{,}9987 - 0{,}0228 = 0{,}9759 \approx 0{,}976$

$P(100{,}6 \leq H \leq 104{,}1) \approx 0{,}976$

Point de méthode : Utiliser la table de la loi normale centrée réduite.
Erreur fréquente : Mal calculer les Z ou oublier que la table donne $P(Z \leq a)$.

3. Probabilité d'une ampoule correctement calibrée

Résumé : Les deux conditions doivent être vérifiées simultanément. D et H sont indépendantes.

Correction détaillée

$P(\text{ampoule correcte}) = P(6{,}48 \leq D \leq 7{,}72) \times P(100{,}6 \leq H \leq 104{,}1)$
$\approx 0{,}990 \times 0{,}976 \approx 0{,}966$

$P(\text{ampoule correctement calibrée}) \approx 0{,}966$

Point de méthode : Pour deux événements indépendants, la probabilité conjointe est le produit des

probabilités.
Erreur fréquente : Additionner au lieu de multiplier.

Partie B

1. Loi suivie par X

Résumé : X = nombre d'ampoules correctement calibrées dans un prélèvement de 50, chaque ampoule a une probabilité 0,97 d'être correcte.

Correction détaillée

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0,97$.

$X \sim B(n = 50 ; p = 0,97)$

Point de méthode : La loi binomiale modélise le nombre de succès dans n essais indépendants.
Erreur fréquente : Oublier de préciser les paramètres.

2. Espérance de X et interprétation

Résumé : Calculer E(X) et interpréter.

Correction détaillée

$E(X) = n \times p = 50 \times 0,97 = 48,5$

Interprétation : En moyenne, sur 50 ampoules prélevées, 48,5 sont correctement calibrées.

$E(X) = 48,5$: en moyenne, 48,5 ampoules sur 50 sont correctes.

Point de méthode : L'espérance d'une binomiale est $n \times p$.
Erreur fréquente : Confondre espérance et variance.

3. Probabilité qu'au moins 4 ampoules ne soient pas correctes

Résumé : Calculer $P(X \leq 46)$ où X = nombre d'ampoules correctes (car au moins 4 non correctes signifie $X \leq 46$).

Correction détaillée

Nombre d'ampoules non correctes $\geq 4 \Leftrightarrow X \leq 46$
On cherche donc $P(X \leq 46)$ pour $X \sim B(50 ; 0,97)$.

On peut utiliser la calculatrice ou l'approximation normale (car n est grand, p proche de 1).
$\mu = 48,5$; $\sigma = \sqrt{(50 \times 0,97 \times 0,03)} \approx \sqrt{1,455} \approx 1,21$

$Z = (46,5 - 48,5) / 1,21 \approx -1,65$
$P(X \leq 46) \approx P(Z \leq -1,65) \approx 0,049$

P(au moins 4 ampoules non correctes) $\approx 0,049$ (arrondi à 10^{-2})

Point de méthode : Pour la binomiale, l'approximation normale est possible si np et n(1–p) sont assez grands.

Erreur fréquente : Oublier la correction de continuité (prendre 46,5 au lieu de 46).

Partie C

1. Valeur de h pour l'intervalle de confiance à 95 %

Résumé : Sous H_0 : $V \sim N(10 ; 0,03)$. Trouver h tel que $P(10 - h \leq V \leq 10 + h) = 0,95$.

Correction détaillée

Pour la loi normale, l'intervalle de confiance à 95 % est $[\mu - 1,96\sigma ; \mu + 1,96\sigma]$.
$h = 1,96 \times 0,03 \approx 0,059 \approx 0,06$ (arrondi à 10^{-2})

$h \approx 0,06$

Point de méthode : Retenir que 95 % correspond à $\pm 1,96\sigma$.
Erreur fréquente : Utiliser 2 au lieu de 1,96.

2. Règle de décision du test

Résumé : Énoncer la règle de décision pour un test bilatéral au seuil de 5 %.

Correction détaillée

On accepte H_0 si la moyenne observée v appartient à l'intervalle $[10 - h ; 10 + h]$, soit $[9,94 ; 10,06]$.
On rejette H_0 si $v < 9,94$ ou $v > 10,06$.

On accepte H_0 si $v \in [9,94 ; 10,06]$, on la rejette sinon.

Point de méthode : La région d'acceptation d'un test bilatéral au seuil α est centrée sur la moyenne théorique, largeur 2h.
Erreur fréquente : Oublier que le test est bilatéral.

3. Décision à partir de l'échantillon

Résumé : $v = 9,67$. Peut-on accepter H_0 ?

Correction détaillée

$v = 9,67 < 9,94$
Donc, v n'appartient pas à l'intervalle d'acceptation. On rejette H_0 au seuil de 5 %.

On rejette H_0 : le volume moyen est significativement inférieur à 10 mL.

Point de méthode : Comparer la valeur observée à la région d'acceptation.
Erreur fréquente : Oublier de vérifier l'appartenance à l'intervalle.

4. Région d'acceptation au seuil de 1 %

Résumé : Choisir parmi les propositions A, B, C, D la bonne région au seuil de 1 %.

Correction détaillée

Pour 1 %, l'intervalle est plus étroit : $\pm 2{,}58\sigma = \pm 0{,}077$, donc [9,923 ; 10,077] ≈ [9,92 ; 10,08]
Donc, la réponse est D.

D = [9,92 ; 10,08]

Point de méthode : Seuil de 1 % correspond à $\pm 2{,}58\sigma$.
Erreur fréquente : Prendre l'intervalle du seuil 5 %.

Formulaire récapitulatif

- Loi normale centrée réduite : $Z = (X - \mu) / \sigma$
- Espérance binomiale : $E(X) = n \times p$
- Intervalle de confiance à 95 % : $[\mu - 1{,}96\sigma \,;\, \mu + 1{,}96\sigma]$
- Primitive de $e^{-a\,t}$: $-(1/a) \times e^{-a\,t}$
- Moyenne sur [a ; b] : $(1/(b - a)) \times \int_a^b f(t)\,dt$
- Dérivée de $e^{k\,t}$: $k \times e^{k\,t}$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les unités et les questions posées avant de commencer à rédiger.
- **Justifiez chaque étape** : expliquez vos calculs et vos raisonnements, même pour les résultats obtenus à la calculatrice.
- **Soignez les conversions d'unités** : vérifiez toujours que vos résultats sont dans les bonnes unités.
- **Utilisez la calculatrice efficacement** : maîtrisez les fonctions statistiques (régression, loi normale, binomiale) de votre calculatrice.
- **Relisez-vous** : vérifiez vos arrondis, la cohérence de vos résultats et la clarté de votre rédaction.