Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2018/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse et calcul d’aire

L’exercice modélise le départ d’un wagon propulsé dans un tube à basse pression, avec pour objectif d’atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. Il étudie la distance parcourue, puis utilise la figure d’une pièce destinée à une gare pour déterminer une aire par calcul intégral.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question A.1. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On compare avec l’équation fournie $y' + ay = 0$: ici $a = -0,2$. Les solutions sont donc de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question A.2. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On a $g'(t) = -15$. En substituant dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. Cette égalité étant vérifiée sur $[0, 3]$, la fonction g est une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est solution de (E).

Question A.3. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l’équation avec second membre s’obtiennent en ajoutant à la solution particulière $g(t) = -15t - 75$ les solutions de l’équation homogène, soit $ke^{0,2t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question A.4. Déterminer la fonction f solution de l’équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. On remplace cette constante dans l’expression de la solution.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question B.1a. À partir de l'expression admise de f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

D'après l'expression fournie, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, donc à $t \geq 0$. L'inégalité est vérifiée sur tout l'intervalle étudié.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, avec égalité seulement pour $t = 0$.

Question B.1b. Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

Puisque $f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, f y est croissante. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$.

t	**0**	**3**
$f'(t)$	0	+
$f(t)$	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est croissante de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45$ sur $[0, 3]$.

Question B.2. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Après une minute, la distance parcourue est $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Cela donne environ $1,605$ km, arrondi au dixième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km.

Question B.3a. Sachant que la vitesse du wagon à l'instant t, en kilomètre par minute, est donnée par f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse en kilomètres par minute est $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$. Pour la convertir en kilomètres par heure, on multiplie par 60 : $7,377 \times 60 \approx 442,6$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$7,4$ km/min, soit environ $442,6$ km/h.

Question B.3b. Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Le seuil de 400 km/h correspond à $400/60 \approx 6,667$ km/min. Or, $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min. Comme f' est continue, elle atteint ce seuil entre 0 et 2 minutes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le wagon atteint 400 km/h en moins de deux minutes.

Question B.4. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La tangente en $t = 2$ s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En remplaçant par les expressions de $f'(2)$ et $f(2)$, on obtient la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

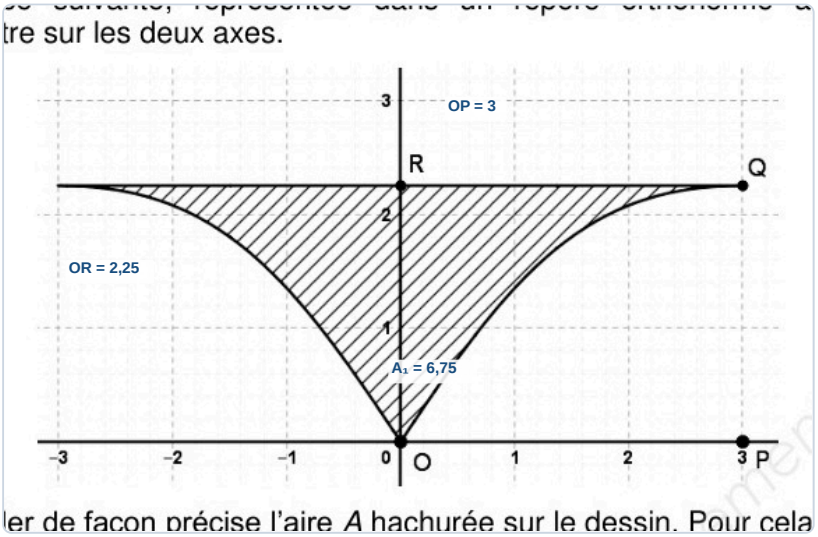
$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question C.1. Choisir, parmi les trois réponses proposées, l'aire du rectangle OPQR en unités d'aire, à partir de la figure.

Sur la figure, le rectangle OPQR a pour largeur $OP = 3$ et pour hauteur $OR = 2,25$. Son aire est donc le produit de ces deux dimensions : $3 \times 2,25 = 6,75$.

Rectangle OPQR annoté



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

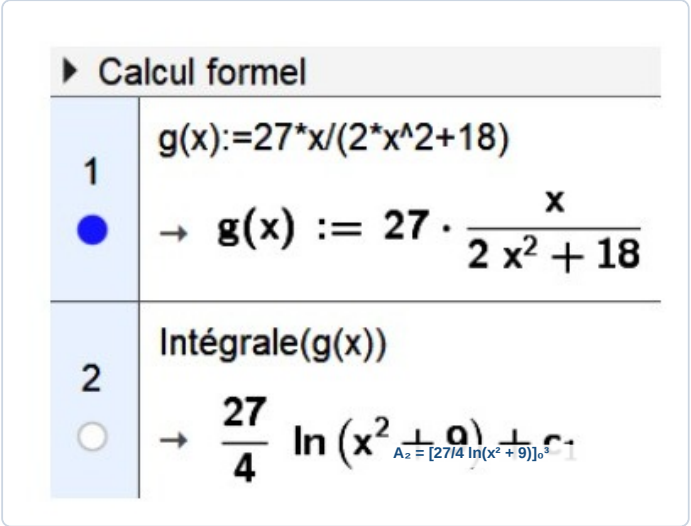
$A_1 = 6,75$ u. a.

Question C.2. **Calculer l'aire A_2 de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3, en utilisant la primitive fournie.**

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire demandée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive fournie :

$$A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ln\left(\frac{18}{9}\right) = \frac{27}{4}\ln 2.$$

Primitive fournie annotée



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

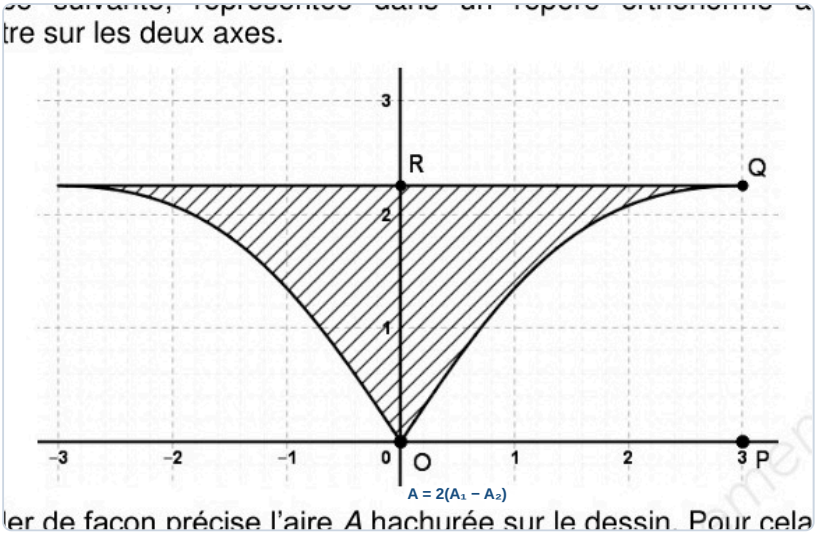
$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question C.3. **Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et l'arrondir au millième.**

Par symétrie, l'aire totale est le double de l'aire comprise entre le bord supérieur et la courbe sur $[0, 3]$. Sur cette moitié, l'aire vaut $A_1 - A_2$, donc :

$$A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143.$$

Aire hachurée et symétrie



✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle de smartphones à partir des données observées sur une population de 200 appareils. Il examine ensuite la réparabilité d'un lot de modèle A par une loi binomiale, puis teste une affirmation relative à la marque B à partir d'une enquête d'opinion.

A. Probabilités conditionnelles

Question A.1. À partir des données de l'énoncé, compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle, en indiquant les totaux sur 200 appareils.

Sur 200 appareils, 3 % donnent 6 smartphones touchés par T et 8 % en donnent 16 touchés par L. Parmi ceux touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2. Les autres effectifs se déduisent des totaux.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l'obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184 et 200.

Question A.2. Pour T : « le smartphone est touché par l'obsolescence technique » et L : « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant que L est réalisé.

Les données de l'énoncé donnent directement les probabilités des deux événements et la probabilité conditionnelle :

- $P(T) = 3\% = 0{,}03$;

- $P(L) = 8\% = 0{,}08$;
- $P_L(T) = 12{,}5\% = 0{,}125$.

La dernière valeur concerne uniquement les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$, $P_L(T) = 0{,}125$.

Question A.3a. Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle : P(T ∩ L).

La probabilité d'être touché par les deux types d'obsolescence est la probabilité d'être touché par L, multipliée par la probabilité d'être touché par T sachant L :

$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}010$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}010$.

Question A.3b. Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence : P(T ∪ L).

Pour obtenir la probabilité d'être touché par au moins un type d'obsolescence, on additionne les deux probabilités puis on retranche leur intersection, comptée deux fois :

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}100$.

Question A.3c. Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité cherchée est conditionnée par l'obsolescence technique. On divise donc la probabilité de l'intersection par $P(T)$:

$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0{,}01}{0{,}03} = 0{,}333\ldots$, soit $0{,}333$ à 10^{-3} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question B.1. Justifier que la variable aléatoire X, qui associe à chaque lot de 50 smartphones le nombre d'appareils non réparables, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Chaque prélèvement a deux issues, avec une probabilité constante $p = 0{,}045$ d'obtenir un smartphone non réparable. Le stock est suffisamment important pour assimiler les prélèvements à des tirages avec remise : les 50 tirages sont indépendants. Le nombre X de smartphones non réparables suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question B.2. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous les appareils soient réparables.

Le lot est entièrement réparable lorsque $X = 0$. La probabilité correspondante est :

$P(X = 0) = (1 - 0{,}045)^{50} = 0{,}1000388\ldots$, soit $0{,}100$ à 10^{-3} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité : $0{,}100$.

Question B.3a. Faire tourner l'algorithme à la main et compléter le tableau pour i = 0, 1, 2 et 3, en indiquant P(X = i) et les valeurs successives de S.

Pour chaque i, l'algorithme ajoute $P(X = i)$ à la somme précédente, initialisée à 0. Les valeurs sont arrondies à 10^{-3}.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de l'algorithme complété

dessous.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,1	0,236	0,272	0,205
S	0,1	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question B.3b. Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, S additionne les probabilités de $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. Elle représente donc la probabilité qu'un lot compte au plus 3 smartphones non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S \approx 0{,}813$, soit environ 81,3 % des lots.

Question B.4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$. Ainsi, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. En moyenne, un lot de 50 smartphones contient donc 2,25 appareils non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2{,}25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question C.1. Sous l'hypothèse nulle H_0 : p = 0,55, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Une seule des trois réponses proposées est exacte.

L'intervalle central de 95 % d'une loi normale s'étend sur environ 1,96 écarts-types de part et d'autre de sa moyenne. Donc $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, ce qui donne $0{,}07$ au centième. Parmi les choix proposés, c'est la troisième valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}07$.

Question C.2. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, on conserve H_0 si la fréquence observée appartient à l'intervalle central de 95 % sous H_0, soit approximativement :

- conserver H_0 si $0{,}48 \leq F \leq 0{,}62$;
- rejeter H_0 si $F < 0{,}48$ ou $F > 0{,}62$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Conserver H_0 pour $F \in [0{,}48\,;\,0{,}62]$, sinon le rejeter.

Question C.3. Parmi les 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée vaut $\frac{76}{180} \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne de l'intervalle d'acceptation $0{,}48$, donc elle se trouve dans la région de rejet. Au seuil de 5 %, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion est de 55 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

On rejette H_0 : l'enquête ne confirme pas la proportion de 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, d'une durée de 2 heures, avec un coefficient de 1 à 3 selon la spécialité. Le sujet étudie le démarrage d'un train à propulsion électromagnétique et l'obsolescence programmée des smartphones. Il évalue la résolution d'équations différentielles, l'analyse et l'intégration, les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et le test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 0, les solutions sont y(t) = k e^(0,2t).
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance par rapport au temps, avec des unités cohérentes.
- L'aire sous une fonction positive entre a et b est donnée par l'intégrale de a à b de cette fonction.
- Pour une loi binomiale B(n,p), l'espérance vaut np et P(X = 0) = (1 - p)^n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités avant de comparer une vitesse en km/min à l'objectif exprimé en km/h.
- Dans un tableau d'effectifs, distinguer intersection, compléments et totaux des lignes et des colonnes.
- Pour justifier une loi binomiale, préciser le nombre d'essais, l'indépendance et la probabilité constante.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de l'intervalle de décision avant de conclure.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la vitesse du wagon à partir de la fonction de distance ?

La vitesse instantanée est la dérivée de la distance par rapport au temps. On calcule donc f'(t), puis on évalue cette expression à l'instant demandé. Il faut conserver les unités cohérentes, ici des kilomètres par minute.

Q : Comment calculer P_T(L) à partir du tableau des smartphones ?

On divise l'effectif des smartphones touchés par les deux obsolescences par l'effectif total des appareils touchés par l'obsolescence technique. Le dénominateur correspond à la condition T.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, chacun divisé en trois parties indépendantes. Traitez d'abord les questions accessibles, répartissez le temps selon les points et gardez quelques minutes pour vérifier les unités et les arrondis.

Q : Comment conclure le test d'hypothèse bilatéral ?

On compare la fréquence observée à l'intervalle centré sur 0,55 qui contient 95 % des fréquences sous H_0. Si elle est dans l'intervalle, on ne rejette pas H_0 au seuil de 5 %; sinon, on le rejette.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2018/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Techniques et Services en Matériels Agricoles : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.