Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Conformité et durée de vie de tubes fluorescents (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2022/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m·s⁻¹ avant que son système de freinage ne ralentisse sa vitesse, notée f(t). L'exercice modélise cette vitesse par une équation différentielle, puis étudie la fonction, la distance parcourue et son développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre sur un intervalle I l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

La formule du sujet donne, pour l'équation homogène $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$: il suffit donc de remplacer le paramètre dans cette expression. Ces fonctions sont définies sur tout intervalle I.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **Pour g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5, vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'équation est donc vérifiée pour tout $t \in [0; +\infty[$, ce qui confirme que g est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: $g(t) = 5$ est solution.

Question 1. c. **Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

On connaît une solution particulière de l'équation complète : $g(t) = 5$. Toute solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0,8t}$, avec k réel. La somme de ces deux expressions donne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution de y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À $t = 0$, la condition initiale donne $20 = 5 + ke^0 = 5 + k$, donc $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la solution qui vérifie $f(0) = 20$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5 sur [0 ; +∞[, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$. La fonction $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est la somme de ce terme et de la constante 5 : sa limite est donc 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale à cette extrémité. L'ordonnée de cette droite est égale à la limite de la fonction.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. En admettant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t) \to 5$ lorsque $t \to +\infty$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $15e^{-0,8t} > 0$ et $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste positive et tend vers 5 sans jamais atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.

Question 4. a. **Pour F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on utilise $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Il vient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de la formule de la distance donnée dans le sujet, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)\,dt$. Comme F est une primitive de f, $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'arrondi au centimètre donne $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier la seule expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, avec la condition correspondante sur la fonction de reste. Aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel indique que le terme du second degré vaut $\frac{24}{5}t^2$. Un développement limité à l'ordre 2 s'écrit avec un reste $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc retenir la proposition qui présente ces deux éléments.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 15 + 5 = 20$ et, avec la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En reportant ces deux valeurs dans la formule, on obtient l'équation de la tangente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = -12t + 20$.

2. Conformité et durée de vie de tubes fluorescents

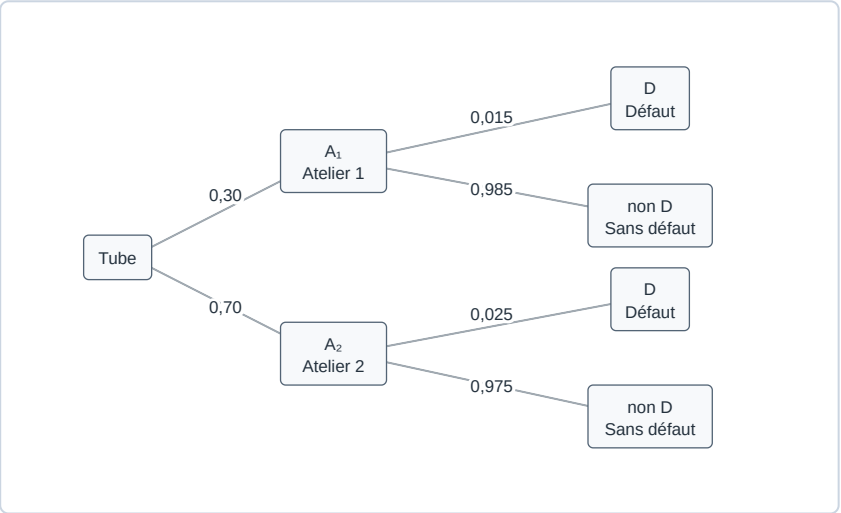
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice aborde les probabilités conditionnelles, la durée de fonctionnement modélisée par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation selon l'atelier de production du tube et son état, défectueux ou non défectueux.

La première bifurcation indique l'atelier d'origine : 30 % pour l'atelier 1 et 70 % pour l'atelier 2. Depuis chaque atelier, les branches donnent les probabilités conditionnelles d'avoir un défaut ou de ne pas en avoir. Les probabilités des branches complémentaires sont obtenues par différence à 1. L'arbre ci-dessous reprend les proportions et taux de défaut indiqués dans l'énoncé.

Arbre pondéré des ateliers et défauts



Probabilités conditionnelles données dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier d'origine, puis présence ou absence d'un défaut, avec les probabilités indiquées.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

Pour que les deux événements se réalisent, le tube doit provenir de l'atelier 1 et être défectueux. On multiplie donc la proportion de tubes fabriqués dans cet atelier par le taux de défaut propre à cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Ce résultat est une probabilité rapportée à toute la production de l'usine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité cherchée est $0{,}0045$, soit $0{,}45\,\%$ des tubes produits dans l'ensemble de l'usine.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,0195.**

Atelier	Contribution à la probabilité d'un défaut
1	$0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$
2	$0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0175$

Les deux ateliers couvrent toute la production : on additionne donc leurs probabilités conjointes de défaut. Ainsi, les données de l'énoncé donnent $P(D) = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$. La valeur imprimée $0{,}0195$ ne correspond pas à ces données; la correction manuscrite visible sur la page indique bien $0{,}0220$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Avec les taux et proportions de l'énoncé, $P(D) = 0{,}022$, soit $2{,}2\,\%$. La valeur $0{,}0195$ est erronée.

Question 4. **Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

1. La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 et soit sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$.
2. La probabilité qu'un tube soit sans défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$.
3. On divise la probabilité conjointe par celle de l'absence de défaut : $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698$. La réponse est une probabilité conditionnelle parmi les seuls tubes non défectueux.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les tubes sans défaut, environ $0{,}698$, soit $69{,}8\,\%$, proviennent de l'atelier 2.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Le paramètre de la loi exponentielle est $\lambda = 0{,}001$ par heure. D'après la formule rappelée dans l'énoncé, l'espérance est l'inverse du paramètre : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}001} = 1\,000$. L'espérance s'exprime dans la même unité que la durée T, donc en heures. Elle représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube est $E(T) = 1\,000$ heures.

Question 2. Calculer, arrondie à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

1. La formule de l'énoncé donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme une loi exponentielle est continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$.
2. En remplaçant λ par $0{,}001$, on obtient $1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$.
3. Au centième près, cette probabilité s'arrondit à $1{,}00$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que la durée soit inférieure à $8\,000$ heures est $1{,}00$ au centième près.

Question 3. Calculer, arrondie à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser une durée t est le complément de la probabilité de ne pas la dépasser. Ainsi, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Cette probabilité est très faible et, arrondie au centième comme demandé, elle vaut $0{,}00$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité de dépasser $10\,000$ heures est $0{,}00$ au centième près, soit environ $0{,}0000454$ avant arrondi.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir de l'échantillon de 1 000 rivets, dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle f̂ de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue p est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes parmi $1\,000$ rivets prélevés, donc $\hat{f} = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette estimation correspond à $97{,}5\,\%$ de rivets conformes dans l'échantillon et sert de valeur centrale pour l'intervalle de confiance demandé ensuite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'estimation ponctuelle est $\hat{f} = 0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$ de rivets conformes.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur $\hat{f}$ pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

On applique la formule de l'énoncé avec $\hat{f} = 0{,}975$, $n = 1\,000$ et le coefficient $1{,}96$. La marge vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. On soustrait cette marge à $\hat{f}$ pour la borne inférieure et on l'ajoute pour la borne supérieure. Chaque borne est arrondie au millième.

Borne	Valeur arrondie
Inférieure	$0{,}965$
Supérieure	$0{,}985$

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'intervalle de confiance à 95 % est $[0{,}965\,;\,0{,}985]$, avec des bornes arrondies au millième.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices, notés chacun sur 10, portent sur le freinage d'un chariot et sur la production de tubes fluorescents : équation différentielle, fonction exponentielle, probabilités, durée de vie et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, on ajoute une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation homogène.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, alors la droite $y = L$ est une asymptote horizontale à sa courbe.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est $\hat{f} \pm 1{,}96\sqrt{\hat{f}(1-\hat{f})/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale après avoir déterminé la solution générale de l'équation différentielle.
- Ne pas confondre une vitesse qui tend vers une limite positive avec une vitesse qui atteint zéro.
- Dans un arbre pondéré, multiplier le long d'une branche et additionner les branches correspondant à l'événement recherché.
- Respecter les inégalités, les unités et les arrondis demandés, notamment au centième ou au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot ?

La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Si F est une primitive de f, alors $d = F(t_1) - F(t_0)$. Gardez la valeur exacte pendant le calcul, puis arrondissez au centimètre comme demandé.

Q : Comment trouver la probabilité conditionnelle demandée pour l'atelier 2 ?

Divisez la probabilité de l'intersection par celle de la condition : $P(A_2 \cap \bar{D}) / P(\bar{D})$. Les probabilités de l'intersection se calculent en multipliant les probabilités des branches correspondantes de l'arbre pondéré.

Q : Combien de temps consacrer à chaque exercice et quelle calculatrice est autorisée ?

Le sujet ne fixe pas de durée par exercice : vous disposez de deux heures pour les deux exercices de dix points. La calculatrice avec mode examen actif est autorisée, ainsi que la calculatrice sans mémoire de type collège.

Q : Quels critères de notation faut-il particulièrement surveiller ?

Le sujet ne fournit pas de grille détaillée de notation. Présentez les étapes utiles, identifiez les formules adaptées et respectez les arrondis explicitement demandés : au centième pour certaines probabilités et au millième pour l'intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2022/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Techniques et Services en Matériels Agricoles : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.