Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS TSMA

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2022/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m/s avant que son système de freinage ne réduise sa vitesse. Les questions étudient une équation différentielle, la fonction vitesse, la distance parcourue et le développement limité de cette fonction.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie donne les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y est $a = 0,8$. En remplaçant a par cette valeur dans la formule, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. On vérifie l'équation en remplaçant g et sa dérivée dans le membre de gauche : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le résultat est égal au membre de droite de l'équation différentielle. La fonction proposée est donc bien une solution particulière.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de l'équation complète est $g(t) = 5$. Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à cette solution toutes les solutions de l'équation homogène associée. D'après la question précédente, celles-ci sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel. On obtient ainsi l'ensemble des solutions demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de l'équation est $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$. Pour satisfaire la condition initiale, on prend $t = 0$: comme $e^0 = 1$, on doit avoir $k + 5 = 20$. Il vient $k = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse du chariot pendant le freinage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend alors vers 0, donc $15e^{-0,8t}$ tend aussi vers 0. Le terme restant dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est constant. Par somme des limites, on obtient la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote, et en donner une équation.

La limite de la fonction en $+\infty$ est finie et égale à 5. Une courbe représentative dont l'ordonnée tend vers une valeur finie admet une asymptote horizontale à cette ordonnée. Ici, l'asymptote est donc parallèle à l'axe des abscisses et passe par les points d'ordonnée 5. Son équation s'écrit :

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et, d'après la limite établie, $f(t)$ tend vers 5 quand t tend vers $+\infty$. Le tableau de variation est :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	5
Variation	$20 \searrow 5$	

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. La vitesse est donc toujours supérieure à $5\ \mathrm{m/s}$ et se rapproche de cette valeur sans l'atteindre.

- La vitesse diminue pendant le freinage.
- Sa limite est positive, et non nulle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme a pour dérivée $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. Le second a pour dérivée 5. La somme obtenue est précisément l'expression de $f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Question 4.b. À l'aide de l'intégrale de f entre t = 0 et t = 1, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. Ainsi, $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. La valeur approchée est arrondie au centimètre, soit au centième de mètre.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir l'unique réponse correcte parmi les développements limités proposés pour f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse retenue, sans justification.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, il faut retenir celle qui reprend ces trois termes et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Les deux autres propositions ne respectent pas cette partie régulière ou ce reste.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On a $f(0) = 20$, et la dérivée donnée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12. On obtient son équation en remplaçant ces valeurs dans la formule.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

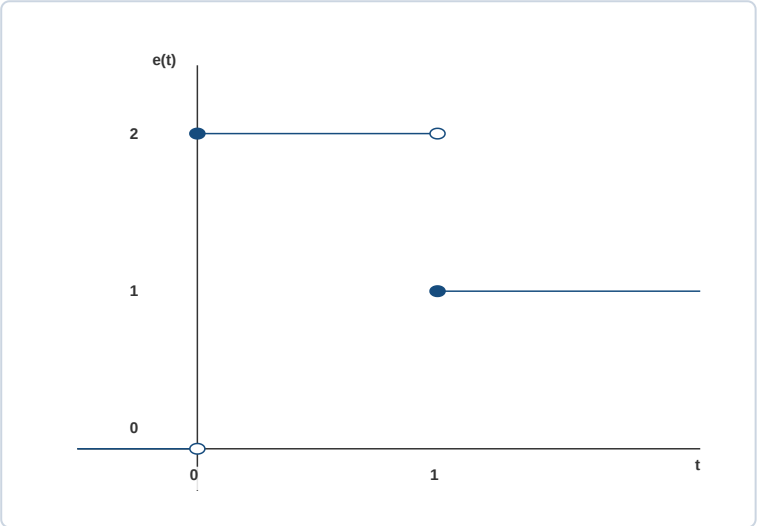
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice porte sur la représentation du signal d'entrée, les transformées de Laplace et l'étude du signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La causalité impose $e(t) = 0$ pour $t < 0$. À $t = 0$, l'échelon $U(t)$ passe à 1 : le signal vaut alors 2 jusqu'à $t = 1$ exclu. À cet instant, le terme retardé $U(t - 1)$ passe à 1, donc le signal descend à 1. Le tracé distingue les valeurs prises aux instants de saut par des points pleins et ouverts.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \le t < 1$, et 1 si $t \ge 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Le formulaire donne la transformée de $U(t)$ et celle de l'échelon retardé $U(t - 1)$. Par linéarité de la transformation de Laplace, on applique ces deux résultats à $e(t) = 2U(t) - U(t - 1)$:

$$E(p) = 2\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. En remplaçant par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$ et le résultat de la question précédente, puis en distribuant le facteur $\dfrac{1}{p+1}$, on obtient l'expression demandée : $S(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p}\right) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons les deux fractions du membre de droite au même dénominateur :

$\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p+1-p}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p(p+1)}$.

Le numérateur se réduit à 1, ce qui établit bien l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

On lit dans le formulaire les transformées usuelles, puis on applique la propriété de retard d'une unité aux deux expressions contenant e^{-p}.

Expression transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

À partir de la décomposition de la question 2, $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Les deux termes retardés sont nuls pour $0 \leq t < 1$. Les termes non retardés ont pour transformée inverse $2(1 - e^{-t})$. Ainsi, sur cet intervalle, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.

La formule valable sur $[1; +\infty[$ s'applique en particulier à $t = 1$:

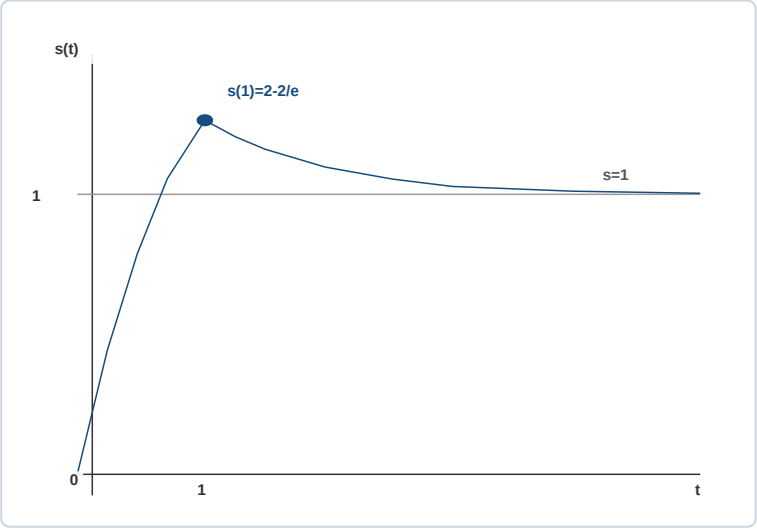
$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}2642$. Arrondi au dixième, cela donne 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}3$ au dixième.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Pour $0 \leq t < 1$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}264$. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$: elle décroît à partir de cette même valeur et tend vers 1. Le tracé est donc continu au point $t = 1$, où il atteint son maximum, puis s'approche de l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0, 0)$, atteint son maximum $(1, 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Le coefficient $e - 2$ est constant et e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite, et il reste la constante 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, fonctions, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a si a est non nul ; les solutions générales s'obtiennent en ajoutant celles de l'équation homogène.
- Si f(t) = Ae^(-kt) + L avec k > 0, alors f tend vers L et sa courbe admet l'asymptote horizontale y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle : d = ∫[t0,t1] f(t) dt.
- Un retard de a unités multiplie la transformée de Laplace par e^(-ap) : f(t-a)U(t-a) a pour transformée F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, distinguer la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation complète.
- Dans l'étude de f, justifier les variations par le signe de f' et interpréter la limite pour répondre à la question sur l'arrêt du chariot.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et exprimer l'arrondi demandé au centimètre.
- Pour les signaux retardés, appliquer le facteur e^(-ap) et respecter le domaine temporel de chaque expression.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre comme celle du sujet ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière de l'équation complète. La solution générale est leur somme. La condition initiale permet ensuite de déterminer la constante.

Q : Comment obtenir le signal de sortie à partir de sa transformée de Laplace ?

On décompose S(p) en termes dont les transformées inverses sont connues, puis on applique la propriété de retard aux facteurs e^(-ap). Il faut ensuite interpréter les fonctions échelon selon les intervalles de temps.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve entre les exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Parcourez les questions, commencez par celles que vous maîtrisez, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les tracés sur le document-réponse.

Q : Quels éléments de présentation permettent d'éviter des erreurs dans ce sujet ?

Présentez les étapes essentielles des démonstrations, précisez les intervalles étudiés et indiquez les unités pour la vitesse et la distance. Pour les tracés, rendez les axes et les changements de signal lisibles.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2022/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Techniques et Services en Matériels Agricoles : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.