Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d’un tiroir et étude d’une fonction (12 questions) **Page 3**

2. Étude d’une fonction périodique par séries de Fourier (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2023/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d’un tiroir et étude d’une fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée selon le temps écoulé depuis le début de la fermeture. L’exercice mobilise une équation différentielle, l’étude d’une fonction exponentielle, un algorithme de seuil et le calcul d’une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant de cette équation du second degré : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme il est positif, l’équation possède deux racines réelles distinctes. On peut aussi factoriser le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Il suffit alors d’annuler l’un des deux facteurs pour obtenir exactement les solutions.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux solutions exactes de l’équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 à l’aide des solutions de l’équation caractéristique et du tableau fourni.

Les racines de l’équation caractéristique sont réelles et distinctes. Le tableau fourni associe alors à chaque racine r_i un terme exponentiel $e^{r_i t}$.

1. Pour $r_1 = -1$, le terme correspondant est $C_1 e^{-t}$.
2. Pour $r_2 = -4$, il est $C_2 e^{-4t}$.

La solution générale est la somme de ces deux termes. Les constantes sont arbitraires puisque cette question ne demande pas encore d’utiliser de conditions initiales.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de −10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f mesure la distance OM en centimètres. À $t = 0$, le point M se trouve à 20 cm de O : cette distance donne directement la valeur initiale de la fonction. La dérivée représente la vitesse de déplacement, en cm·s^{-1}. Comme l’énoncé précise que cette vitesse est négative et vaut 10 en valeur absolue, son signe doit être conservé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance initiale est $f(0) = 20$ cm et la vitesse initiale est $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

1. On utilise l'expression donnée de f et on remplace t par 2.
2. Les exposants deviennent -2 et $-4 \times 2 = -8$, d'où $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$.

Cette expression est la valeur exacte de la distance demandée, en centimètres. Une évaluation numérique donne environ $3,1567$ cm, ce qui confirme que la distance est positive.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Deux secondes après le début de la fermeture, $OM = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)$ cm exactement.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes.**

La fonction donnée est continue. À l'instant initial, la distance vaut 20 cm, donc elle est supérieure au seuil de 0,5 cm. À 4 secondes, on trouve $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274$ cm, strictement inférieur au seuil. Par continuité, la distance passe sous 0,5 cm à un instant antérieur à 4 secondes : l'affirmation du constructeur est donc vérifiée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé avant 4 secondes : à 4 s, sa distance au meuble est d'environ 0,4274 cm.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

On étudie séparément les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, les deux exponentielles sont de la forme e^{-u} avec $u \to +\infty$, et chacune tend vers zéro. La différence tend donc également vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de la fonction lorsque t tend vers $+\infty$ est $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à zéro. Une courbe représentative dont l'ordonnée tend vers une valeur finie possède une asymptote horizontale à droite, d'ordonnée égale à cette limite.

Il n'y a donc aucun terme constant à ajouter : l'asymptote est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'équation de l'asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ est $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$. Pour le premier terme, le coefficient -1 apparaît en dérivant e^{-t}. Pour le second, le coefficient de dérivation est -4, qui se multiplie au coefficient déjà négatif $-\frac{10}{3}$. La dérivée obtenue est valable pour tout $t \in [0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant négative sur l'intervalle, la fonction est strictement décroissante. À gauche, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À droite, la limite calculée précédemment vaut 0. Le tableau indique ainsi la décroissance de 20 vers 0 ; la valeur 0 est une limite lorsque t tend vers l'infini.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement décroissante de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, au besoin en ajoutant des lignes, en indiquant t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Chaque passage dans la boucle ajoute 0,1 à t. On calcule la distance à chacune des valeurs demandées, puis on teste si elle reste strictement supérieure à 0,5. À 3,8 secondes, le test est encore vrai. L'incrément suivant donne 3,9 secondes : la distance y est inférieure au seuil, le test devient faux et l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$, au centième	Test $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, lorsque la variable t vaut 3,9.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1. À $t = 3,8$, la distance vaut environ 0,52 cm : le test reste vrai et la boucle continue.
2. Après l'incrément, $t = 3,9$ et la distance vaut environ 0,47 cm : le test devient faux et l'exécution s'arrête.

Dans le contexte, le tiroir est donc fermé à 3,9 secondes selon le seuil retenu. Le franchissement du seuil a lieu entre 3,8 et 3,9 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur finale est $t = 3,9$ s : le tiroir est alors fermé selon le critère de distance de l'énoncé.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On intègre les deux exponentielles, puis on applique le facteur $\frac{1}{4}$ de la moyenne :

$$m = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{10}{12}(1 - e^{-16})\right].$$

En développant, le terme constant vaut $\frac{1}{4}(\frac{70}{3} - \frac{5}{6}) = \frac{45}{8}$. Les termes exponentiels ont pour coefficients $-\frac{70}{12} = -\frac{35}{6}$ et $\frac{10}{48} = \frac{5}{24}$, ce qui donne bien l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La position moyenne sur les quatre premières secondes est $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

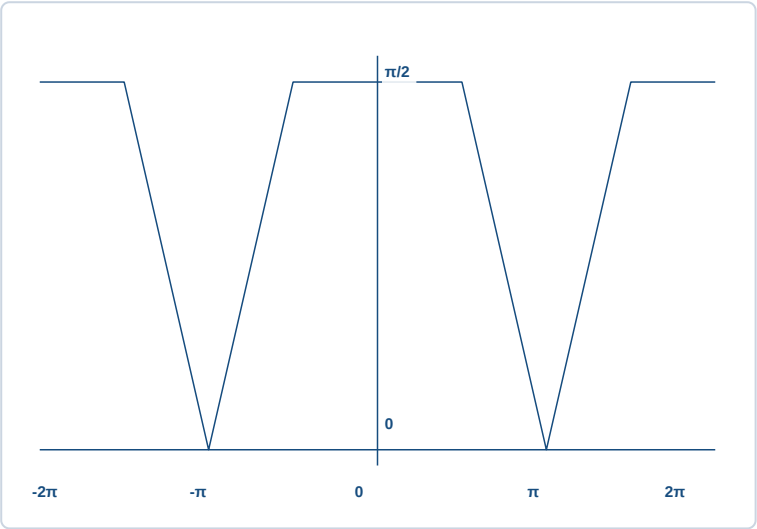
2. Étude d’une fonction périodique par séries de Fourier

Une fonction paire de période 2π est définie par morceaux sur [0 ; π], puis représentée sur plusieurs périodes. L’exercice porte sur ses coefficients et sa somme partielle de Fourier, l’identification d’une courbe et l’approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa périodicité.

Sur chaque période, la fonction vaut $\pi/2$ sur un intervalle de longueur π, centré sur un multiple de 2π, puis descend ou remonte linéairement jusqu’à 0 aux multiples impairs de π. Elle est paire et de période 2π.

Courbe de f sur [-2π ; 2π]



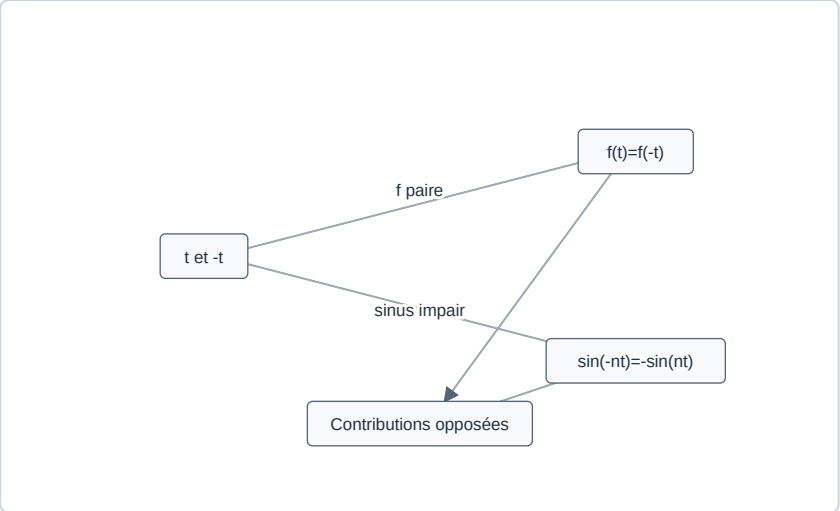
✓ RÉPONSE À RETENIR

Relier les points $(-2\pi;\pi/2), (-3\pi/2;\pi/2), (-\pi;0), (-\pi/2;\pi/2), (\pi/2;\pi/2), (\pi;0), (3\pi/2;\pi/2), (2\pi;\pi/2)$ dans cet ordre.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Sur une période centrée en 0, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, donc leur produit est impair. Son intégrale sur l’intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle.

Parité dans le calcul de b_n



L'intégrande f(t)sin(nt) est impaire.

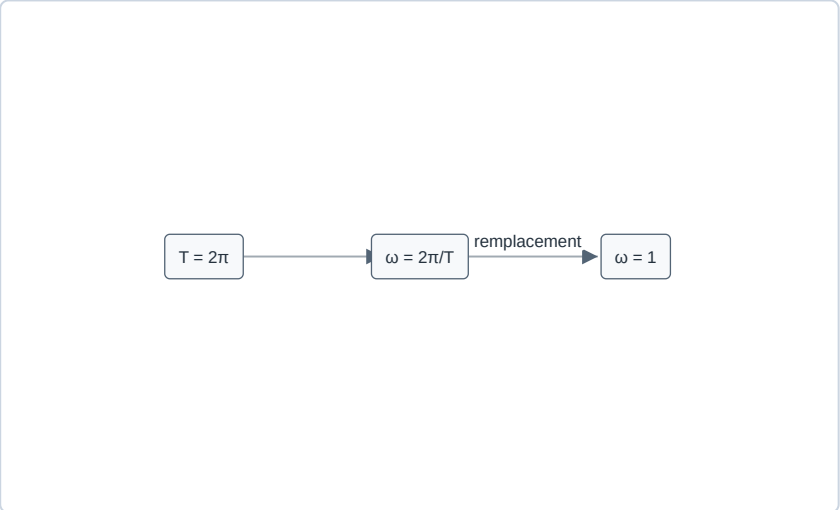
✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation est donnée par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La période étant $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Période et pulsation



Calcul de la pulsation associée à la période 2π.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier a_0 est égal à $3\pi/8$.

Comme f est paire et $T = 2\pi$, la formule du formulaire donne $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. On calcule séparément les aires sur les deux intervalles de définition.

Intervalle	Intégrale
$[0;\pi/2[$	$(\pi/2)(\pi/2) = \pi^2/4$
$[\pi/2;\pi]$	$\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \pi^2/8$

Ainsi, $a_0 = \frac{1}{\pi}(\pi^2/4 + \pi^2/8) = 3\pi/8$.

Calcul des contributions à a_0

Contribution sur [0 ; π]	Valeur
Palier [0 ; π/2[	π²/4
Segment [π/2 ; π]	π²/8
Somme divisée par π	3π/8

La formule paire donne $a_0 = (1/\pi)\int_0^{\pi} f(t)dt$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Le formulaire donne, puisque f est paire et $T = 2\pi$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On découpe l'intégrale en $\pi/2$, puis on remplace $f(t)$ par son expression sur chaque intervalle.

Intervalle	Expression de f	Contribution à a_n
$[0;\pi/2[$	$\pi/2$	$\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt$
$[\pi/2;\pi]$	$\pi - t$	$\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$

La somme de ces contributions est l'égalité demandée.

Découpage de l'intégrale de Fourier

Intervalle	f(t)	Contribution à a_n
[0 ; π/2[	π/2	$\int_0^{(\pi/2)}\cos(nt)dt$
[π/2 ; π]	π − t	$(2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)dt$

Application de la formule des coefficients pour une fonction paire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On remplace successivement n par 1, 2 et 3 dans la formule admise. Les couples de cosinus obtenus sont $(0, -1)$, $(-1, 1)$ et $(0, -1)$, ce qui donne les coefficients exacts ci-dessous.

Coefficients de Fourier exacts

n	cos(nπ/2)	cos(nπ)	a_n
1	0	−1	2/π
2	−1	1	−1/π
3	0	−1	2/(9π)

Valeurs obtenues par substitution dans la formule admise.

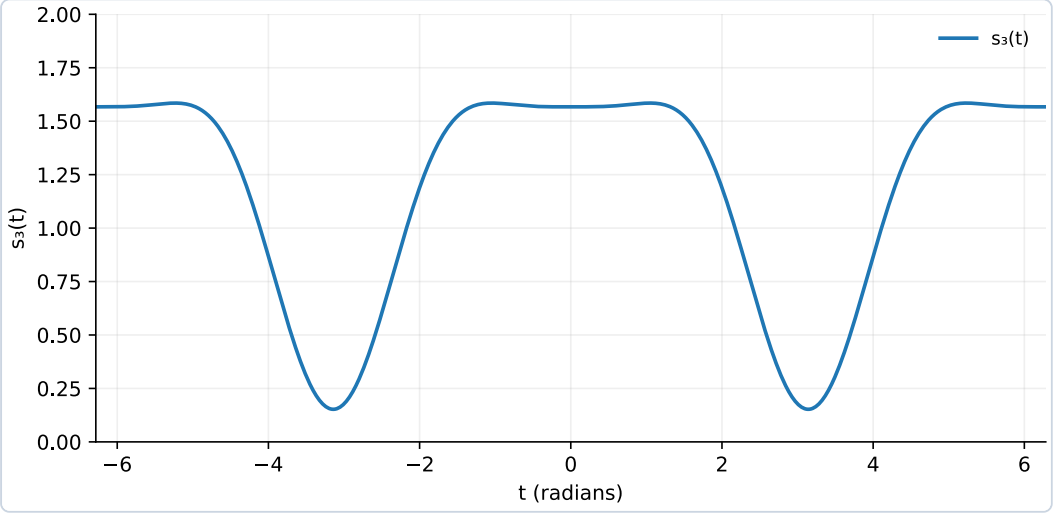
✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire les résultats précédents que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, car les coefficients b_n sont nuls. En y remplaçant les quatre coefficients calculés précédemment, on obtient l'expression demandée.

Somme partielle de Fourier s_3



Courbe calculée à partir de l'expression exacte de s_3.

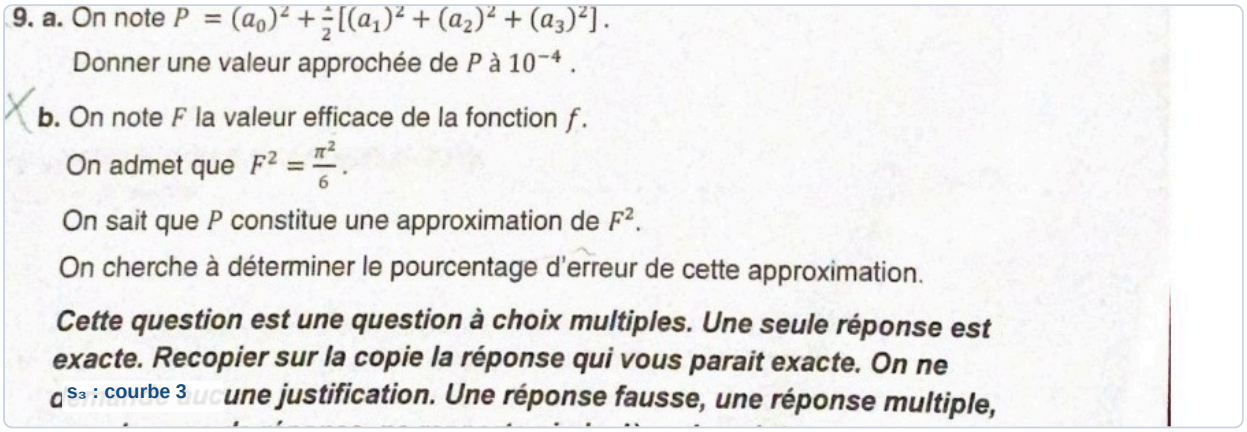
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La somme partielle présente des minima au voisinage de $t = -\pi$ et $t = \pi$, et un maximum près de $t = 0$. Parmi les trois courbes du sujet, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



s_3 : courbe 3

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10⁻⁴ près.

On utilise les coefficients exacts $a_0 = 3\pi/8$, $a_1 = 2/\pi$, $a_2 = -1/\pi$ et $a_3 = 2/(9\pi)$, puis on calcule les deux contributions à P.

Terme	Valeur approchée
$(a_0)^2 = 9\pi^2/64$	1,3879
$\frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$	0,2558
Somme P	1,6437

Décomposition numérique de P

Partie calculée	Valeur
$(a_0)^2$	1,3879
$\frac{1}{2}[(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2]$	0,2558
P	1,6437

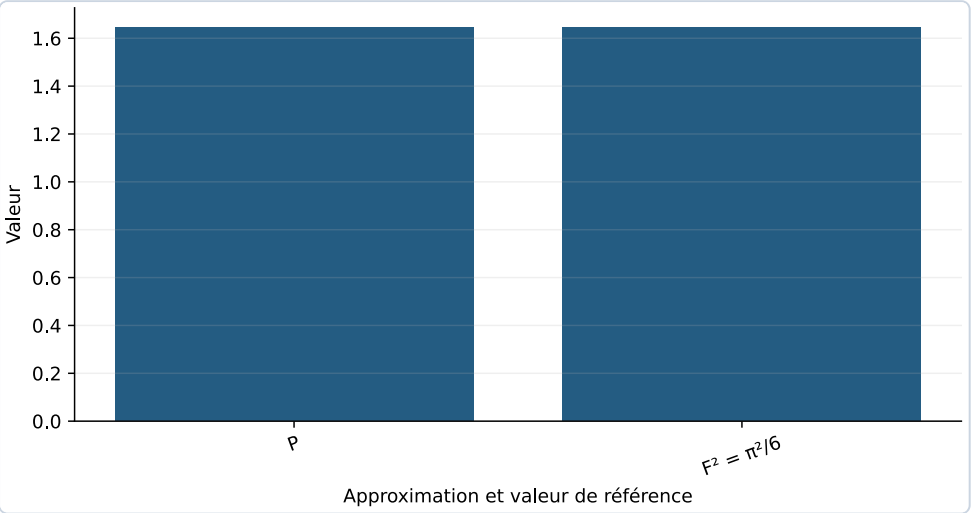
Valeurs arrondies à quatre décimales.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1,6437$ à 10^{-4} près.

Question 9.b. Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur de cette approximation parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

L'écart relatif entre P et F^2 est d'environ $0,074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, la réponse correspondante est $0,1\,\%$.



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Son coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonction exponentielle, puis une fonction périodique par séries de Fourier, en évaluant calcul, justification et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme de la solution générale.
- Pour $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, $f(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ et la courbe admet l'asymptote horizontale $y = 0$.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et a_n se calcule avec $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La pulsation d'une fonction périodique de période T est $\omega = 2\pi/T$; les sommes partielles de Fourier utilisent les coefficients a_n et b_n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe de la vitesse initiale : le rapprochement du tiroir correspond ici à $f'(0)$ négatif.
- Dans l'algorithme, augmenter t de 0,1 et tester la condition après chaque mise à jour.
- Pour les coefficients de Fourier, distinguer a_0 des coefficients a_n et employer les formules adaptées à la parité.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2 et rapporter l'écart à la valeur de référence.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale composée de deux exponentielles. Les conditions initiales déterminent ensuite les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair et son intégrale sur une période symétrique est nulle. Les coefficients de Fourier b_n valent ainsi zéro pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment gérer le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et peuvent être traités indépendamment. Répartissez le temps entre eux, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les arrondis et le document-réponse.

Q : Qu'attend le jury quand une question demande de démontrer un résultat ?

Présentez une démarche lisible, les formules utilisées et les étapes qui relient les données à la conclusion. Respectez les valeurs exactes demandées, les arrondis indiqués et l'interprétation dans le contexte lorsqu'elle est requise.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2023/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Techniques et Services en Matériels Agricoles : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.