Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS - Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et commercialisation de farine (12 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2023/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l’eau d’un spa

Après l’arrêt du chauffage, la température de l’eau d’un spa, initialement à 38 °C, est modélisée par une équation différentielle, avec une température extérieure constante de 25 °C. Les questions étudient la résolution du modèle, ses variations et sa limite, puis le délai de déclenchement d’une alarme et un algorithme lié au seuil de 34 °C.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

On résout l’équation homogène en la mettant sous la forme $y' = -0,05y$. Pour une équation $y' = ay$, les solutions sont $y(t) = Ce^{at}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Ici, elles sont donc de la forme $Ce^{-0,05t}$, définies sur l’intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}, \quad C \in \mathbb{R}.$

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

1. Pour une fonction constante $y(t) = c$, on a $y' = 0$.
2. L’équation devient $0,05c = 1,25$, donc $c = 25$. La fonction constante égale à 25 est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 25.$

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène. On additionne donc la constante 25 à la famille $Ce^{-0,05t}$, où C est un réel quelconque.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25, \quad C \in \mathbb{R}.$

Question 4. Montrer que, pour tout t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

> Dans la solution générale, la condition initiale impose $f(0) = C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant C par 13, on obtient bien l’expression demandée, valable pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25.$

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans le modèle : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$. Après arrondi au dixième, l'eau du spa est à environ 28,9 °C, 24 heures après la coupure du chauffage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(24) \approx 28{,}9\ ^\circ\text{C}$.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[.

1. La dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$.
2. Le terme constant 25 a une dérivée nulle. Ainsi, $f'(t) = 13 \times (-0{,}05)e^{-0{,}05t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et argumenter si ce sens de variation est cohérent avec le contexte.

L'exponentielle est strictement positive pour tout $t \geq 0$, donc la dérivée est toujours négative :

- $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t} < 0$;
- f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

C'est cohérent avec le contexte : après l'arrêt du chauffage, l'eau refroidit.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, ce qui correspond au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.

1. Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0{,}05t \to -\infty$.
2. Donc $e^{-0{,}05t} \to 0$, et le terme exponentiel de $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$ tend vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$.

Question 3. b). Interpréter la limite obtenue dans le contexte de l'exercice.

La température de l'eau se rapproche de 25 °C au fil du temps. Cette valeur est la température ambiante extérieure au spa : selon le modèle, l'eau finit par atteindre l'équilibre thermique avec son environnement.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, l'eau se rapproche de la température ambiante : **25 °C**.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul la durée exacte avant que l'alarme retentisse, puis donner cette durée arrondie à la minute.

> Le seuil de 36 °C est atteint lorsque $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, soit $e^{-0{,}05t} = 11/13$. En prenant le logarithme, on obtient $t = 20\ln(13/11)$ heures, soit environ 200,465 minutes. Comme l'alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure au seuil, elle retentit juste après cet instant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Seuil atteint après $20\ln(13/11)$ h, soit environ **3 h 20 min**.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni, qui augmente H d'une heure et recalcule T selon le modèle tant que T ≥ 34.

1. À $H = 7$, $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34,161$, donc la boucle continue.
2. À $H = 8$, $T = 13e^{-0{,}05\times 8} + 25 \approx 33,714 < 34$. La boucle s'arrête et l'algorithme affiche 8.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme affiche **8**.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme avance heure par heure et s'arrête au premier nombre entier d'heures où la température modélisée est strictement inférieure à 34 °C. Il détermine donc à quel premier instant entier le seuil est franchi, sans calculer l'instant exact du franchissement.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Il indique qu'après **8 heures**, la température modélisée est inférieure à 34 °C.

2. Contrôles qualité et commercialisation de farine

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes fabriquées avec un échantillon de blé et le taux d'humidité de deux livraisons, puis étudie le poids de ses sacs de farine. L'exercice analyse aussi l'acceptation d'une nouvelle farine par des catégories de clients au moyen de probabilités conditionnelles et d'une loi binomiale.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est $\bar{x} = \frac{104+81+83+57+55}{5} = 76$ mm. Avec la division par l'effectif, l'écart-type vaut $\sqrt{\frac{(104-76)^2+(81-76)^2+(83-76)^2+(57-76)^2+(55-76)^2}{5}} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type vaut 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs n'est en dehors de l'intervalle [x̄ - 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l'intervalle de contrôle est $[76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm.

Mesure (mm)	Dans l'intervalle ?
104	Oui
81	Oui
83	Oui
57	Oui
55	Oui

Aucune mesure n'est hors de l'intervalle : le technicien n'a pas à tester cinq nouveaux échantillons.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune mesure hors de [40 ; 112] mm : pas de nouveau test.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux chargements, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo vide, sachant que le taux d'humidité exigé est inférieur à 13 %.

L'humidité du mélange est la moyenne pondérée par les masses : $\frac{29\,540 \times 12,4 + 14\,540 \times 14,1}{29\,540 + 14\,540} \approx 12,961\%$. Comme ce taux est inférieur à 13 %, le déchargement des deux camions dans le même silo est autorisé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Humidité du mélange : 12,961 % ; déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit : $Z = \frac{X-25{,}2}{0{,}1}$. Pour $X = 25$, on obtient $Z = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0{,}02275$, soit 0,023 au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X < 25) \approx 0{,}023$.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 - h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^-2 près.

1. Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs sont à moins de $1{,}96$ écart-type de la moyenne.
2. Donc $h \approx 1{,}96 \times 0{,}1 = 0{,}196$ kg, soit 0,20 kg au centième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La loi normale de X a pour écart-type 0,1 kg : environ 95 % des masses se situent entre $25{,}2 - 1{,}96 \times 0{,}1 = 25{,}004$ kg et $25{,}2 + 1{,}96 \times 0{,}1 = 25{,}396$ kg. Or la courbe fournie est très étalée autour de 25,2 kg.

- Elle ne peut donc pas représenter la densité de X.

✓ RÉPONSE À RETENIR

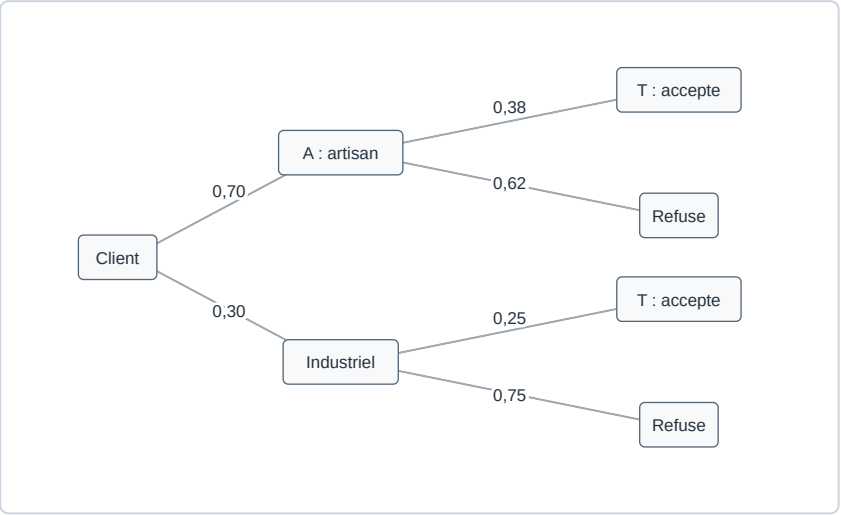
La courbe est trop étalée pour un écart-type de 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation concernant le type de client et son acceptation de tester la farine La Romaine par un arbre pondéré.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester La Romaine ». Les probabilités de refus complètent celles d'acceptation à 1.

Arbre pondéré : client et acceptation



A : artisan boulanger ; T : accepte de tester La Romaine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : $P(A) = 0,70$, $P(\overline{A}) = 0,30$; acceptation : 0,38 pour les artisans et 0,25 pour les industriels.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

1. Le chemin « artisan boulanger puis accepte » correspond à $A \cap T$.
2. Donc $P(A \cap T) = P(A)P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les deux types de clients qui acceptent sont des cas incompatibles. On additionne donc les probabilités des deux chemins : $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,341.$

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer à 10^-3 près la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.

Par la formule des probabilités conditionnelles, $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0,266}{0,341} \approx 0,780$ au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \mid T) \approx 0,780.$

Question 4. a). Pour Y suivant une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341, calculer à 10^-3 près la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$. Le calcul donne environ 0,125 au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 60) \approx 0,125.$

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

1. L'espérance d'une loi binomiale est $E(Y) = np$.
2. Ainsi, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. En moyenne, environ 68 clients sur 200 auront testé La Romaine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(Y) = 68,2$ clients sur 200 en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies. Les deux exercices étudient le refroidissement d'un spa et les contrôles qualité ainsi que la commercialisation en minoterie. Les compétences évaluées mobilisent équations différentielles, dérivation, statistiques, loi normale, probabilités conditionnelles, loi binomiale et algorithmique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution constante particulière vaut b/a lorsque a est non nul.
- L'humidité d'un mélange se calcule par moyenne pondérée des taux selon les masses des chargements.
- Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs sont dans l'intervalle centré [μ - 1,96σ ; μ + 1,96σ].
- Pour Y suivant B(n, p), E(Y) = np et P(A ∩ B) = P(A)P(B|A).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et le domaine [0 ; +∞[dans le modèle thermique du spa.
- Pour le contrôle statistique, calculer les bornes de l'intervalle avant de tester chaque valeur.
- Pour le silo, pondérer les taux d'humidité par les masses et vérifier le seuil strict de 13 %.
- Distinguer probabilité d'intersection et probabilité conditionnelle, et respecter les arrondis demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de refroidissement ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution constante particulière. La solution générale est la somme des deux. Enfin, on applique la condition initiale f(0) = 38 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux chargements ?

Multipliez la masse de chaque chargement par son taux d'humidité, puis additionnez les masses d'eau obtenues. Divisez cette somme par la masse totale de blé et comparez le taux résultant au seuil de 13 %.

Q : Comment calculer la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine ?

Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. La probabilité demandée est P(Y ≤ 60), obtenue avec la fonction de répartition binomiale ou en additionnant les probabilités de 0 à 60.

Q : Comment vérifier l'arbre pondéré et calculer une probabilité conditionnelle ?

Les probabilités des branches issues d'un même nœud doivent totaliser 1. Une probabilité d'intersection se calcule en multipliant les probabilités d'une branche. Pour une probabilité conditionnelle, on divise l'intersection par la probabilité de l'événement conditionnant.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstsma.fr/assets/annales/bts-tsma/E2 - Mathématiques/2023/BTS TSMA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Techniques et Services en Matériels Agricoles : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.